Análisis 1 - Alimentos - 1° cuatrimestre 2019

Práctica 2

Subespacios, autovalores, diagonalización

Subespacios, generadores y bases

1. *a*) Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos del plano son puntos, rectas o todo $\mathbb{R}^2$.

$$\mathbb{S}_1 = \langle (0,0) \rangle \qquad \mathbb{S}_2 = \langle (1,1) \rangle \qquad \mathbb{S}_3 = \langle (1,1); (2,2) \rangle$$

$$\mathbb{S}_4 = \langle (1,0); (0,2) \rangle \qquad \mathbb{S}_5 = \langle (1,1); (-1,-1) \rangle$$

b) Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos del espacio son puntos, rectas, planos o todo $\mathbb{R}^3$.

$$\mathbb{S}_1 = \langle (0,0,0) \rangle \quad \mathbb{S}_2 = \langle (1,1,1) \rangle \quad \mathbb{S}_3 = \langle (1,1,1); (2,2,2) \rangle \quad \mathbb{S}_4 = \langle (1,0,1); (0,2,0) \rangle$$

$$\mathbb{S}_5 = \langle (1,0,1); (0,2,0); (3,5,3) \rangle \qquad \mathbb{S}_6 = \langle (1,0,1); (0,2,0); (a,b,a) \rangle$$

$$\mathbb{S}_7 = \langle (1,0,1); (0,2,0); (3,0,1) \rangle$$

2. En cada caso, determinar si el vector $\mathbf{v}$ pertenece al subespacio $\mathbb{S}$ y, en caso afirmativo, escribir a $\mathbf{v}$ como combinación lineal de los generadores dados.

a) $\mathbf{v} = (1,2) \qquad \mathbb{S} = \langle (2,3); (3,4) \rangle$

b) $\mathbf{v} = (-1, \frac{1}{2}, 2) \qquad \mathbb{S} = \langle (2,-1,-4) \rangle$

c) $\mathbf{v} = (1,2,3) \qquad \mathbb{S} = \langle (-1,1,3); (2,1,0) \rangle$

d) $\mathbf{v} = (1,2,3) \qquad \mathbb{S} = \langle (1,1,1); (2,1,1); (1,-1,-1) \rangle$

e) $\mathbf{v} = (-1,2,2) \qquad \mathbb{S} = \langle (1,2,3); (-3,-2,-4); (0,4,5) \rangle$

f) $\mathbf{v} = (x,y,z) \qquad \mathbb{S} = \langle (1,1,1); (1,1,0); (1,0,0) \rangle$

3. Decidir si el conjunto de vectores es linealmente dependiente o independiente. En caso de que sea linealmente dependiente, escribir alguno de los vectores como combinación lineal de los otros.

a) $\{(1,-1); (-1,2)\}$

b) $\{(1,-1); (-1,2); (3,4)\}$

c) $\{(1,-1); (0,0); (-1,2)\}$

d) $\{(1,-1); (-2,2)\}$

e) $\{(3,2,-1)\}$

f) $\{(1,-2,-1); (-2,1,0); (-2,4,2)\}$

g) $\{(1,-2,-1); (-2,4,2)\}$

h) $\{(1,-2,-1); (-2,1,0); (0,3,1)\}$

i) $\{(1,1,-2); (4,0,-7); (-1,3,1)\}$

j) $\{(1,1,1); (0,1,1); (0,0,1)\}$

4. Dar una base y la dimensión del subespacio $\mathbb{S}$.

a) $\mathbb{S} = \langle (1,-1); (-1,2) \rangle$

b) $\mathbb{S} = \langle (1,-1,2); (0,0,1); (-2,2,0) \rangle$

c) $\mathbb{S} = \langle (1,-2,-1); (-2,1,0); (0,3,1) \rangle$

d) $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \colon 3x_1 - 2x_2 = 0\}$

e) $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 + x_3 = 0; x_2 - x_3 = 0; 2x_1 + 2x_2 = 0\}$

f) $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 - 3x_3 = 0; x_2 + x_3 - 2x_4 = 0\}$

5. Dar una base y la dimensión de $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$.

   a) $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 - 2x_2 = 0\}$ y $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon x_2 + x_3 = 0\}$.
   b) $\mathbb{S} = \langle (1,-1,3); (2,1,-1) \rangle$ y $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.
   c) $\mathbb{S} = \langle (1,2,-1); (2,3,2) \rangle$ y $\mathbb{T} = \langle (0,1,1); (1,0,2) \rangle$.
   d) $\mathbb{S} = \langle (1,0,-1); (0,1,1) \rangle$ y $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon x_2 + x_3 = 0; x_1 - 2x_2 = 0\}$.
   e) $\mathbb{S} = \langle (2,1,1,-3); (1,0,1,-1) \rangle$ y $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 + x_4 = 0\}$.

6. Determinar los valores de k para los cuales $\{(0,1,-2); (1,-1,k); (2,-3,0)\}$ es linealmente dependiente.

7. En cada caso, decidir si el conjunto de vectores dado es una base del subespacio $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}$:

   a) $\{(1,1,0)\}$
   c) $\{(1,1,0); (1,-1,-1)\}$
   b) $\{(2,0,-1); (-6,0,3)\}$
   d) $\{(2,0,-1); (1,-1,1)\}$

8. Dados los subespacios $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}$ y $\mathbb{T} = \langle (1,2,1); (2,-1,-2) \rangle$, encontrar una base de $\mathbb{R}^3$ que contenga una base de $\mathbb{S}$ y una base de $\mathbb{T}$.

9. *a)* Encontrar tres sistemas de generadores del subespacio

$$\mathbb{S} = \langle (1,-1,2,1), (3,1,0,-1), (1,1,-1,-1) \rangle \subset \mathbb{R}^4 .$$

   b) ¿$(2,1,3,5)$ está en $\mathbb{S}$?
   c) ¿Es cierto que $\mathbb{S} \subset \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$?
   d) ¿Es cierto que $\{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subset \mathbb{S}$?

10. Decidir si los siguientes conjuntos son linealmente independientes o no. En caso de no serlo, determine qué elementos pueden eliminarse de manera que el conjunto residual sea linealmente independiente y genere el mismo subespacio que el conjunto original. Finalmente, complete cada conjunto a una base del espacio ambiente.

   a) $\{(1,2,3), (1,2,4), (1,2,5)\}$ en $\mathbb{R}^3$.
   b) $\{(1,0,-1), (1,1,2), (0,1,1)\}$ en $\mathbb{R}^3$.
   c) $\{(1,1,2), (1,4,3), (3,3,3), (e,\pi,\sqrt{2})\}$ en $\mathbb{R}^3$.
   d) $\{(1,1,1), (1,\alpha,\alpha^2), (1,\beta,\beta^2)\}$ en $\mathbb{R}^3$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
   e) $\{(1,1,1,1), (1,\alpha,\alpha^2,\alpha^3), (1,\beta,\beta^2,\beta^3)\}$ en $\mathbb{R}^4$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

11. Determinar todos los $\lambda \in \mathbb{R}$ de manera que los siguientes conjuntos resulten linealmente independientes:

   a) $\{(1,2,\lambda), (1,1,1), (0,1,1-\lambda)\}$ en $\mathbb{R}^3$.

Operaciones con matrices y vectores

12. *a*) Sean A, B y $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Mostrar la falsedad de las siguientes afirmaciones:
    1) $(A.B)^2 = A^2B^2$
    2) $A.B = 0 \Rightarrow A = 0$ ó $B = 0$
    3) $A.B = A.C$ y $A \neq 0 \Rightarrow B = C$
    4) $A.B = 0 \Rightarrow B.A = 0$
    5) $A^j = 0 \Rightarrow A = 0$
    6) $A^2 = A \Rightarrow A = 0$ ó $A = I_n$

    b) Dar condiciones necesarias y suficientes sobre A y $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ para que:
    1) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
    2) $A^2 - B^2 = (A-B).(A+B)$

13. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interno usual de $\mathbb{R}^n$. Verificar que si pensamos $v, w \in \mathbb{R}^n$ como matrices de $n \times 1$, entonces

$$\langle v, w \rangle = w^t \cdot v = v^t \cdot w = \langle w, v \rangle$$

donde pensamos a sus traspuestos v^t, w^t como matrices de $1 \times n$.

14. Se $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, sea A^t la matriz traspuesta de A. Probar que
    a) $(Av)^t = v^t \cdot A^t$ para todo vector $v \in \mathbb{R}^n$.
    b) $\langle Av, w \rangle = w^t \cdot A \cdot v = (A^t w)^t \cdot v = \langle v, A^t w \rangle$ para todo par de vectores $v \in \mathbb{R}^n, w \in \mathbb{R}^m$.

15. Una matriz $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es **ortogonal** si $\langle Uv, Uw \rangle = \langle v, w \rangle$ para todo $v, w \in \mathbb{R}^n$. Probar que son equivalentes:
    a) U es ortogonal.
    b) U es una isometría, o sea $\|Uv\| = \|v\|$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$.
    c) U es inversible y su inversa se calcula como su traspuesta, es decir $U^{-1} = U^t$.

16. Probar que toda matriz ortogonal verifica $\det(U) = \pm 1$.

17. Probar que $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz ortogonal de $\mathbb{R}^2$. Mostrar que U es una simetría con respecto a la recta $y = x$. ¿Qué determinante tiene U?

18. Si $\theta \in [0, 2\pi]$, y $U_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, probar que U_θ es ortogonal y preserva la orientación. Mostrar que U es una rotación de ángulo θ alrededor del origen, en sentido positivo.

Autovalores y autovectores, diagonalización

19. Calcular el polinomio característico, los autovalores y autovectores de cada matriz:

    a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

    b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

    c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$;

    d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

    e) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$;

    f) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

20. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$. Mostrar que A y A^t tienen los mismos autovalores. Mostrar con un ejemplo que no sucede lo mismo con los autovectores.

21. Calcular el polinomio característico, los autovalores y autovectores de la matriz A de cada item (en todos los casos, $a \in \mathbb{R}$):

    a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

    b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;

    c) $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$;

    d) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

    e) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

    f) $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$;

    g) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$.

22. *a*) Sean $A, C, D \in M_n(\mathbb{R})$ con C inversible tales que $A = C^{-1}DC$. Mostrar que $A^k = C^{-1}D^kC$ cualquiera sea $k \in \mathbb{N}$.

b) Calcular

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}^n$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

23. *a*) Hallar C, D como en el ejercicio anterior para cada una de las matrices A del Ejercicio 21.

b) Decidir en cada caso si A es (semi)-definida positiva, negativa o indefinida.